KOSTAS BUČYS

ELEMENTARIOJI ALGEBRA

Mokomoji knyga

Klaipėda 2021

P R A T A R M Ė

Ši mokomoji knyga skirta vidurinės mokyklos aukštesniųjų klasių moksleiviams arba norintiems savarankiškai tobulinti matematines žinias. Autorius stengėsi parengti tokią knygą, kuri būtų naudinga tiems, kurie primiršo matematiką, ir tiems, kurie nori pagilinti savo matematines žinias. Turint omenyje, kad dauguma šios knygos skaitytojai – būsimieji aukštųjų mokyklų studentai, tai autorius stengėsi terminologiją kiek galima priartinti prie terminologijos priimtos aukštosiose mokyklose ir pateikti papildomos medžiagos, kuri gali būti naudinga toliau studijuojant aukštosiose mokyklose. Pirmiausia tai būtų matematinės logikos sąvokos, įvairios skaičių aibės, ribos, išvestinių bei integralų sąvokos.

Mokomąją knygą sudaro 21 skyrius, kiekvienas jų suskirstytas į skyrelius. Pirmasis skyrius skirtas matematinės logikos pradmenims, antrajame – aibių teorijos pagrindinės sąvokos, nuodugniai išdėstyta realiųjų skaičių teorija. Trečiasis – dvyliktasis skyriai skiriami algebros kurso medžiagai. Penktajame skyriuje papildomai nagrinėjami kompleksiniai skaičiai ir jų savybės. Čia plačiau gvildenama lygčių ir jų sistemų ekvivalentumas, lygčių ir nelygybių sprendimo metodai, nagrinėjamas iracionaliųjų lygčių ir nelygybių sprendimas.

Tryliktasis – šešioliktasis skyriai skirti trigonometrinių funkcijų apibrėžimui, jų savybių nagrinėjimui. Čia išnagrinėti pagrindiniai trigonometrinių lygčių ir nelygybių sprendimo metodai. Septynioliktajame – dvidešimt pirmajame skyriuose išdėstyta analizės pradmenų kurso medžiaga. Šiuose skyriuose, kaip tik ir stengtasi visą pateikiamą medžiagą kiek galima priartinti prie aukštosiose mokyklose vartojamų sąvokų ir terminologijų.

Visuose skyriuose po teorinės medžiagos išspręsta daug pavyzdžių, kurie padės įsisavinti teorinę medžiagą ir išmokti spręsti uždavinius savarankiškai. Kiekvienas skyrius baigiamas uždaviniais savarankiškam darbui ir jų atsakymais. Teoremų įrodymų ir pavyzdžių sprendimo pabaiga žymima simboliu ▲.

Į literatūros sąrašą įtrauktos knygos, kurias autorius cituoja ar taiko knygos tekste arba rekomenduoja skaitytojui gilesnėms nagrinėjamos medžiagos studijoms.

Knygoje, be abejo, yra trūkumų, taisytinų vietų. Autorius bus dėkingas visiems skaitytojams už pateiktas kritines pastabas, patarimus, pasiūlymus ir pageidavimus. Juos prašyčiau siųsti adresu: bucysk@gmail.com.

Nuoširdžiai dėkoju Klaipėdos universiteto prof. dr. J. Janutėnėnei ir mokytojai metodininkei R. Jakubauskaitei, atidžiai perskaičiusioms rankraštį ir pateikusioms vertingų pastabų.

K. Bučys

T U R I N Y S

1 SKYRIUS. MATEMATINĖS LOGIKOS PRADMENYS

1.1. MATEMATINĖS LOGIKOS SĄVOKA

Žmogui dažnai trūksta žinių apie kokį nors jį dominantį objektą. Kai nėra galimybių pasinaudoti informacijos šaltiniais, tenka bandyti pačiam gauti reikalingas žinias. Žinių trūkumą galima papildyti atliekant bandymus ir stebėjimus arba samprotaujant.

Samprotaudami susiduriame su dvejopo pobūdžio žiniomis: vienas jau turime, o kitas išvedame iš jų samprotavimais. Pirmąsias vadiname **prielaidomis**, o antrąsias – **išvadomis**. Vadinasi, samprotaudami iš tam tikrų prielaidų gauname vienokias ar kitokias išvadas. Tačiau kaip sužinoti, ar tos išvados teisingos?

Dar senovėje žymiausi mąstytojai stengėsi nustatyti tokias samprotavimo taisykles, dėsnius, schemas, kuriomis remdamiesi galėtų apsisaugoti nuo klaidingų išvadų, samprotautų tiktai teisingai. Buvo sukurtas mokslas apie teisingo samprotavimo būdus – **logika**.

Logika, kaip savarankiškas mokslas, susiformavo **IV** amžiuje p. m. e. Vienu iš jos kūrėjų laikomas graikų filosofas **Aristotelis** (384 – 322 m. p. m. e.) Aristotelio sukurtoji logikos sistema išliko iki mūsų dienų. Ji vadinama **formaliąja logika**, nes ji tiria tokius samprotavimo dėsningumus, kurie priklauso ne nuo mąstymo turinio, o nuo jo formos, nuo minčių struktūros.

Kiekviena mokslinė teorija vystydamasi pasiekia tokį abstrakcijos laipsnį, kai iškyla būtinybė įvesti simbolius sąvokoms ir ryšiams tarp jų žymėti. Įvedus simbolius, atsirado galimybė formalizuoti logikos dėsnius, taikyti matematinius metodus, sudaryti logikos nagrinėjamų objektų matematinius modelius.

Logikos matematizavimo idėją pirmasis pasiūlė vokiečių matematikas **Gotfridas Leibnicas** (1646 – 1716). Jis manė, kad visas turimas žinias galima išskaidyti į paprasčiausius elementus, pažymėti juos specialiais simboliais, apibrėžti veiksmų su tais simboliais taisykles – ir bus nauja algebra, kuri padės lengvai gauti naujas teisingas išvadas, patikrinti, ar teisingi įvairūs samprotavimai. Anot Leibnico, įvedus tuos simbolius, visiems, net ir filosofams, nereikės įrodinėti savųjų tiesų, stengiantis vienam kitą perrėkti, užteks sėdus prie stalo paskaičiuoti, kurio tiesa ir kurio – ne. Tačiau ši Leibnico idėja, kaip vėliau paaiškėjo, iš principo neįgyvendinama.

Iš dalies Leibnico mintis savo darbuose realizavo airių matematikas Džordžas Bulis (1815 – 1864). Jis sukūrė algebrą, kurios metodai ir dėsniai vėliau buvo pritaikyti matematizuojant logiką. Palaipsniui susikūrė nauja matematinė teorija – **matematinė logika**, kuri savo ruožtu sudarė rimtas prielaidas tolesniam matematikos vystymuisi. Paaiškėjo, kad matematinė logika glaudžiai susijusi su **algoritmų teorija**. Jos reikšmė ypač išaugo skaičiavimo mašinų ir kompiuterių sukūrimo ir jų tobulinimo laikotarpiu.

Matematinė logika svarbi ir pačiai matematikai. Vartojant jos simbolius, galima trumpai užrašyti matematinius teiginius.

1.2. TEIGINIAI, PREDIKATAI IR KVANTORIAI

Kad apibrėžtume teiginį, išnagrinėkime keletą sakinių:

1. Profesorius įėjo į kabinetą su knyga rankoje.
2. Kodėl vakar nebuvai paskaitoje?
3. Šeši daugiau už penkis. (Galima ir taip užrašyti: $6 > 5$.)
4. 52 dalijasi iš 13.
5. $25 + (-36) > 0$.

Antrasis sakinys yra klausiamasis. Kiti sakiniai teikia tam tikrą informaciją. Visais atvejais, išskyrus antrąjį, galime vienareikšmiškai nustatyti, ką tie sakiniai teigia: **tiesą** ar **netiesą**.

1 apibrėžimas. *Sakinį, kuris išreiškia tiesą arba netiesą, vadinsime* ***teiginiu****.*

Teiginį galime užrašyti raidėmis arba kitokiais simboliais. Jeigu teiginys išreiškia tiesą, tai jį vadinsime **teisingu**, jeigu netiesą – **neteisingu**. Pavyzdžiui, 3 – sis ir 4 – sis yra teisingi teiginiai, o 5 – sis sakinys yra neteisingas teiginys.

Teiginius žymėsime mažosiomis raidėmis su indeksais arba be jų, pavyzdžiui, p, q, r_1 ir pan. Bet kokio teiginio p teisingumui žymėti vartosime simbolį $\tau(p)$ ir rašysime:

$\tau(p) = 1$, kai teiginys p teisingas,

$\tau(p) = 0$, kai teiginys p neteisingas.

Funkciją $\tau(p)$ vadinsime teiginio p **teisingumo reikšme**. Ne visuomet yra lengva nustatyti konkretaus teiginio teisingumo reikšmę.

Matematikoje daugelio teiginių teisingumas nustatomas **įrodymais**, t.y. seka tam tikrų samprotavimų, paremtų logikos dėsniais ir vienų teiginių išvedimo iš kitų teiginių taisyklėmis. Tokie teiginiai vadinami **teoremomis**. Matematinė logika nagrinėja, kaip nustatyti teiginio teisingumo reikšmę, kai teiginys yra sudėtingas, t.y. sudarytas iš kelių kitų teiginių.

Kaip jau matėme, yra sakinių, kurie nėra teiginiai (2 – sis sakinys). Išnagrinėkime dar keletą pavyzdžių.

6. $5x + 3 > 0$,
7. $a + b = b - a$,

8. $(a+b)c = ac - bc$,

9. $x^2 + 2x - 3 < 0$.

Iš pirmo žvilgsnio atrodytų, kad visi šie teiginiai kažką teigia. Tačiau ką jie teigia – tiesą ar netiesą – nustatyti negalima. Taip yra todėl, kad šiuose sakiniuose veiksnys yra kintamasis. Paėmę vieną kintamojo reikšmę, galime gauti teisingą teiginį, paėmę kitą reikšmę – neteisingą. Pavyzdžiui, 6 –asis sakinys tampa teisingu teiginiu, kai $x > -0{,}6$, ir neteisingu, kai $x \leq -0{,}6$.

2 apibrėžimas. *Sakinį su vienu ar keliais kintamaisiais, kuris tampa teiginiu vietoje kintamųjų įrašius konkrečias jų reikšmes, vadinsime* ***predikatu***.

Predikatus žymėsime didžiosiomis raidėmis, tarp skliaustų nurodydami į jį įeinančius kintamuosius. Pavyzdžiui, 6 – 9 sakinius galime užrašyti kaip predikatus: $P(x)$, $Q(a,b)$, $R(a,b,c)$, $T(x)$.

Turėdami kokį nors predikatą $P(x)$, žinomų x reikšmių visumą galime skirti į dvi dalis: į tas x reikšmes, su kuriomis predikatas $P(x)$ yra teisingas teiginys, ir į tas x reikšmes, su kuriomis predikatas $P(x)$ – neteisingas teiginys. Todėl kiekvienas predikatas $P(x)$ apibrėžia aibę, žymimą

$$\{x | P(x)\},$$

– visumą tų x reikšmių, su kuriomis predikatas $P(x)$ yra teisingas teiginys. Vadinasi,

jei $P(a)$ teisingas, tai $a \in \{x | P(x)\}$,

jei $P(a)$ neteisingas, tai $a \notin \{x | P(x)\}$.

Pavyzdžiui, jei $P(x)$ reiškia anksčiau minėtą 6 – ąjį sakinį, tai

$$\{x | P(x)\} = \{x | 5x + 3 > 0\} = (-0{,}6; +\infty).$$

Pastarąjį intervalą gauname išsprendę nelygybę $5x + 3 > 0$, t.y. radę tas x reikšmes, su kuriomis sakinys $5x + 3 > 0$ tampa teisingu teiginiu.

Pažymėsime, kad vidurinėje mokykloje sprendžiamos lygtys, nelygybės, jų sistemos yra sakiniai su kintamaisiais, taigi predikatai. Jas sprendžiant ieškoma atitinkamais predikatais apibrėžtų aibių.

Predikatus paversti teiginiais galima dvejopai. Pirmąjį būdą, kai vietoje kintamojo įrašomas konkretus objektas, jau aptarėme. Antrasis būdas pagrįstas kvantorių naudojimu. Dažniausiai naudojami du **kvantoriai – bendrumo** ir **egzistavimo**. Terminas ,,kvantorius“ kilęs iš lotyniško žodžio *quantum* – ,,kiek“ ir kiekybiškai apibūdina teiginį.

Simboliu $\forall$ žymėsime **bendrumo kvantorių**; jį vartosime vietoje žodžių „bet kuris“, „kiekvienas“, „visi“. Pavyzdžiui, teiginį „Kad ir koks būtų realusis skaičius x, visada $5-x=5+(-x)$ užrašome taip:

$$\forall x \in R:\ 5-x=5+(-x).$$

Simboliu $\exists$ žymėsime **egzistavimo kvantorių**; jį vartosime vietoje žodžių „egzistuoja bent vienas“, „galima rasti“. Pavyzdžiui, teiginį „Galima rasti tokią natūraliąją x reikšmę, su kuria $6+x=8$“ užrašome taip:

$$\exists x \in N:\ 6+x=8.$$

Iš predikato $P(x)$ galime gauti teiginius, parašydami priešais jį bendrumo arba egzistavimo kvantorių. Sakiniai: $\forall x\ P(x)$ – su visais x predikatas $P(x)$ yra teisingas, $\exists x\ P(x)$ – egzistuoja toks x, su kuriuo predikatas $P(x)$ teisingas, jau yra teiginiai.

1.3. LOGINĖS OPERACIJOS

Teiginiai skirstomi į **paprastuosius** ir **sudėtinius**. Paprastuoju laikomas toks teiginys, kurio negalima suskaidyti į jokius kitus teiginius. Jeigu teiginį galima suskaidyti į keletą paprastesnių savarankiškų teiginių, tai jis vadinamas sudėtiniu.

Sudėtiniai teiginiai sudaromi iš kitų teiginių (paprastų arba taip pat sudėtinių) sujungiant juos **loginėmis jungtimis**. Išskirsime šitokias penkias jungtis:

1. netiesa, kad;
2. arba;
3. ir;
4. jeigu ... , tai;
5. tada ir tik tada, kai.

Sudėtinių teiginių sudarymą naudojantis šiomis jungtimis vadinsime **loginėmis operacijomis**. Priklausomai nuo vartojamos jungties, loginę operaciją vadinsime atitinkamai **neigimu**, **disjunkcija**, **konjunkcija**, **implikacija** ir **ekvivalencija**.

1 apibrėžimas. *Jeigu p – teiginys, tai teiginį „Netiesa, kad p“ (arba sakoma „Ne p“) vadinsime teiginio p* ***neiginiu*** *ir žymėsime $\overline{p}$ arba $\neg p$.*

Neiginio teisingumo reikšmė yra

$$\tau(\overline{p})=1-\tau(p).$$

Taigi $\overline{p}$ yra teisingas teiginys tada ir tik tada, kai p – neteisingas. Pavyzdžiui, jeigu p pažymėsime neteisingą teiginį „15 dalijasi iš 4“, tai $\overline{p}$ bus teisingas teiginys „Netiesa, kad 15 dalijasi iš 4“.

2 apibrėžimas. *Jeigu* p ir q *teiginiai, tai teiginį „*p *arba* q*“ vadinsime teiginių* p ir q ***disjunkcija*** *ir žymėsime* $p \vee q$.

Teiginių p ir q disjunkcija yra neteisingas teiginys tada ir tik tada, kai p ir q abu neteisingi.

1 pavyzdys. Jeigu teiginiai:

p – „$4 \cdot 3 - 16 > 0$“, $\tau(p) = 0$,

q – „18 yra pirminis skaičius“, $\tau(q) = 0$,

r – „20 dalijasi iš 5“, $\tau(r) = 1$,

tai $\tau(p \vee r) = 1$, $\tau(r \vee q) = 1$, $\tau(p \vee q) = 0$, $\tau(p \vee q \vee r) = 1$. ▲

3 apibrėžimas. *Jeigu* p ir q *teiginiai, tai teiginį „*p *ir* q*“ vadinsime teiginių* p ir q ***konjunkcija*** *ir žymėsime* $p \wedge q$.

Teiginių p ir q konjunkcija yra teisingas teiginys tada ir tik tada, kai p ir q abu teisingi.

2 pavyzdys. Jeigu teiginiai:

p – „trikampio vidaus kampų suma lygi π“, $\tau(p) = 1$,

q – „$2 \cdot 2 = 5$“, $\tau(q) = 0$,

r – „$15 - 9 > 0$“, $\tau(r) = 1$,

tai $\tau(p \wedge r) = 1$, $\tau(r \wedge q) = 0$, $\tau(p \wedge q) = 0$, $\tau(p \wedge q \wedge r) = 0$. ▲

4 apibrėžimas. *Jeigu* p ir q *teiginiai, tai teiginį „jeigu* p*, tai* q*“ vadinsime teiginių* p ir q ***implikacija*** *ir žymėsime* $p \Rightarrow q$.

Teiginių p ir q implikacija yra neteisingas teiginys tada ir tik tada, kai p teisingas, o q neteisingas.

Implikaciją $p \Rightarrow q$ galime skaityti dar ir šitaip:

„Iš p išplaukia q“, „q tada, kai p“, „p yra teiginio q pakankamoji sąlyga“, „q yra teiginio p būtinoji sąlyga“.

Kai matematinis „ $p \Rightarrow q$“ pavidalo teiginys yra teorema, tai teiginys p vadinamas **teoremos sąlyga**, o q – jos **išvada**. Sukeitę teoremos $p \Rightarrow q$ prielaidą ir išvadą vietomis, gauname teoremą $q \Rightarrow p$, kuri vadinama **atvirkštine** duotajai. Kai teorema $p \Rightarrow q$ yra teisinga, atvirkštinė jai gali būti ir teisinga, ir neteisinga. Pavyzdžiui, teorema „Jei keturkampis yra rombas, tai įstrižainės viena kitai statmenos“ yra teisinga, o jai atvirkštinė teorema „Jei keturkampio įstrižainės yra statmenos viena kitai, tai jis – rombas“ yra neteisinga.

5 apibrėžimas. *Jeigu* p ir q *teiginiai, tai teiginį „*p *tada ir tik tada, kai* q*“ vadinsime teiginių* p ir q ***ekvivalencija*** *ir žymėsime* $p \Leftrightarrow q$.

Ekvivalencija $p \Leftrightarrow q$ yra teisingas teiginys, kai p ir q teisingumo reikšmės sutampa, ir neteisingas, kai p ir q teisingumo reikšmės skiriasi.

Ekvivalenciją $p \Leftrightarrow q$ galime skaityti dar ir šitaip:

„p būtina ir pakankama, kad būtų q“, „q būtina ir pakankama, kad būtų p“.

3 pavyzdys. Jeigu teiginiai:

p – „skaičius e yra iracionalusis“, $\tau(p)=1$,

q – „$2\cdot 3=5$“, $\tau(q)=0$,

r – „$11-91<0$“, $\tau(r)=1$,

t – „lygtis $x^2+1=0$ turi dvi realias šaknis“, $\tau(t)=0$,

tai $\tau(p \Leftrightarrow r)=1$, $\tau(r \Leftrightarrow q)=0$, $\tau(p \Leftrightarrow q)=0$, $\tau(q \Leftrightarrow t)=1$. ▲

Sudarysime loginių operacijų teisingumo reikšmių lentelę:

p	q	$\tau(p \vee q)$	$\tau(p \wedge q)$	$\tau(p \Rightarrow q)$	$\tau(p \Leftrightarrow q)$
1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

Neigimo operacija yra **unitarinė**, t.y. atliekama su vienu teiginiu. Visos kitos operacijos yra **binarinės**, nes jos atliekamos su dviem teiginiais.

1.4. LOGIKOS DĖSNIAI

Suformuluosime svarbiausius logikos dėsnius, kurie remiasi ilgaamže mąstymo patirtimi ir išplaukia iš pagrindinių formų teisingumo reikšmių nustatymo dėsnių.

1. Dvigubo neigimo dėsnis. *Teiginio p neiginio neiginys $\overline{\overline{p}}$ yra logiškai ekvivalentus teiginiui p:*

$$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p.$$

2. Neprieštaravimo dėsnis. *Du vienas kitam priešingi teiginiai p ir $\overline{p}$ negali būti vienu metu teisingi*:

$$\tau(p \wedge \overline{p})=0.$$

3. Negalimo trečiojo dėsnis. *Iš dviejų priešingų teiginių* p ir $\overline{p}$ *vienas visuomet yra teisingas*:

$$\tau(p \vee \overline{p}) = 1 .$$

4. Teisingos išvados dėsnis (modus ponens). *Iš teisingos prielaidos išplaukia tik teisinga išvada*.

5. Neteisingos išvados dėsnis (modus tollens). *Neteisinga išvada išplaukia tik iš neteisingos prielaidos t.y.*

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}) .$$

1.5. AKSIOMOS IR TEOREMOS

Kiekvienoje matematikos srityje vartojamos tiek bendros visai matematikai, tiek ir specifinės, tik tai sričiai būdingos sąvokos. Naujos sąvokos turi būti apibrėžtos.

1 apibrėžimas. *Matematinės sąvokos apibrėžimu (definavimu) atskleidžiami būdingiausi tos sąvokos bruožai, nusakomas jos turinys arba esmė.*

Remiantis apibrėžimu, apibrėžtąjį objektą galima išskirti iš kitų jam artimų objektų. Naują sąvoką galima įvairiai apibrėžti. Labiausiai paplitęs apibrėžimo būdas, kai nurodoma **giminė** ir **rūšinis skirtumas**. Pavyzdžiui, apibrėžime „Rombas yra lygiagretainis, kurio gretimos kraštinės lygios“ nurodyta giminė (lygiagretainis) ir rūšinis skirtumas (gretimų kraštinių lygumas).

Apibrėždami kurią nors naują sąvoką, remiamės jau žinomomis sąvokomis. Pastarosios savo ruožtu yra apibrėžiamos, remiantis vėl kitomis sąvokomis. Savaime suprantama, kad toks vienų sąvokų apibūdinimas, naudojantis kitomis sąvokomis, negali tęstis be galo. Bet kurios teorijos kūrimą tenka pradėti nuo sąvokų, kurios įvedamos be specialaus apibrėžimo. Jų prasmė yra daugiau ar mažiau visiems aiški arba aiškinama pavyzdžiais.

2 apibrėžimas. *Neapibrėžiamos sąvokos vadinamos* ***pirminėmis****, arba* ***pagrindinėmis****.*

Pavyzdžiui, **aibė**, **elementas**, **atitiktis** yra vienos iš pirminių visos matematikos sąvokų.

Kiekviena matematikos šaka turi ir savas pirmines sąvokas. Pavyzdžiui, aritmetikos pirminė sąvoka yra **natūrinis skaičius**, geometrijos – **taškas**, **tiesė**, **plokštuma**, **atstumas** ir t.t.

Pirminėms sąvokoms išskirti iš kitų formuluojami tam tikri teiginiai, vadinami **aksiomomis**. Aksiomos nusako esminius pirminių objektų bruožus.

3 apibrėžimas. ***Aksiomos*** *yra pirminiai teiginiai, kurių teisingumas priimamas be įrodymo*.

Aksiomos yra būtinos, pradedant kurti bet kurią naują matematinę teoriją. Iš tikrųjų, įrodyti kokį nors teiginį – reiškia išvesti jį iš kitų jau įrodytų, teisingų teiginių. Tačiau iš ko išvesti pačius pirmuosius teiginius? Suprantama, aksiomos nėra absoliučios – jas galima parinkti įvairiai. Kurie teiginiai bus paimti kaip aksiomos, o kurie iš pastarųjų išvesti – priklausys nuo teorijos autorių, jų patirties, tradicijų, patogumo ir kitų faktorių.

Kiekvienas teiginys, kuris nėra aksioma turi būti įrodytas.

4 apibrėžimas. *Teiginys* t, *kurio teisingumas patvirtinamas arba paneigiamas įrodymo būdu, vadinamas* ***teorema***.

Teoremos paprastai formuluojamos sudėtiniais sakiniais. Pirmąją teoremos dalį, dažnai prasidedančią žodžiu „jeigu", vadiname **teoremos sąlyga**, antrąją dalį, prasidedančią žodžiu „tai",vadiname **teoremos išvada**. Tokios teoremos pagal savo loginę schemą yra implikacijos.

5 apibrėžimas. *Mąstymo procesas, kurio metu nustatoma, kad teiginio* t *teisingumo reikšmė lygi* 1 (*t.y.* $\tau(t)=1$), *vadinamas* ***teoremos*** t ***įrodymu***.

Teorema turėtume vadinti kiekvieną įrodomą teiginį, bet praktiškai taip vadinami tik svarbesni iš jų. Pavyzdžiui, teiginį „Lyginių sveikųjų skaičių suma yra lyginis skaičius" būtų nelogiška vadinti teorema, nes tai jau labai akivaizdus tvirtinimas.

6 apibrėžimas. *Pagalbinis teiginys, naudojamas vienos ar kelių teoremų įrodymui, vadinamas* ***lema***.

Tačiau, pavyzdžiui, teiginio, žinomo Pitagoro teoremos pavadinimu, niekas nepavadins lema ar tiesiog tvirtinimu, nes tai vienas svarbesnių geometrijos dėsnių ir anaiptol neakivaizdus. Skirstymas į lemas, teoremas ar tiesiog tvirtinimus yra reliatyvus, priklausantis nuo dėstymo formos bei autoriaus nuomonės.

7 apibrėžimas. *Kurios nors matematikos srities aksiomų visuma vadinama* ***aksiomų sistema***.

Aksiomų sistemos sudarymas – sunkus uždavinys. Beje, jis gali būti išspręstas nevienareikšmiškai. Pavyzdžiui, vienoje aksiomų sistemoje teiginys p gali būti priimtas kaip aksioma, o teiginys q – kaip teorema, kitoje sistemoje gali būti atvirkščiai: q – aksioma, p – teorema.

Aksiomų sistemai yra keliami tam tikri reikalavimai, ir kuo geriau sistema juos tenkina, tuo ji laikoma optimalesne. Pagrindiniai reikalavimai yra šie:

1. Sistemos minimalumas. Aksiomų sistemoje turi būti kuo mažiau aksiomų. Tai atitinka bendrą požiūrį matematikoje: kuo daugiau teiginių įrodyti, kuo mažiau jų priimti be įrodymo.

2. Sistemos neprieštaringumas. Aksiomų sistema laikoma neprieštaringa, jeigu ja remiantis negalima įrodyti, kad kuris nors teiginys yra ir teisingas, ir klaidingas. Šis reikalavimas yra kategoriškas, nes prieštaringa aksiomų sistema nieko neverta.

3. Sistemos pilnumas. Aksiomų sistemos pilnumas reiškia reikalavimą, kad ją sudarytų tiek ir tokių aksiomų, jog būtų galima įrodyti arba paneigti bet kurio tos matematikos srities teiginio teisingumą.

4. Sistemos nepriklausomumas. Aksiomų sistema vadinama nepriklausoma, jeigu nė viena iš jos aksiomų nėra kitų tos sistemos aksiomų išvada. Šis reikalavimas glaudžiai siejamas su pirmuoju.

8 apibrėžimas. *Kiekviena objektų sistema, kuriai teisinga aksiomų sistema, vadinama tos aksiomų sistemos* ***interpretacija****.*

Sakoma, kad matematikos teorija sukurta aksiominiu metodu, jeigu iš pradžių buvo nustatytos pirminės sąvokos ir sudaryta aksiomų sistema, po to remiantis ta sistema įrodyti kiti teiginiai.

Aksiominis metodas matematikoje naudojamas seniai. Pastaruoju metu jis ypač populiarus, nes matematikos teorijos, sukurtos aksiominiu metodu, patrauklios savo logine darna, neprieštaringa vidine struktūra.

Jau minėjome, kad teoremą „Jei p, tai q" galime užrašyti kaip implikacija $p \Rightarrow q$. Tačiau tuos pačius teiginius p ir q gali sieti ir kiti implikaciniai sąryšiai. Todėl teoremas patogu skirstyti į **tiesiogines**, **atvirkštines**, **priešingąsias** ir **priešingąsias atvirkštinėms**.

Jei teoremą $p \Rightarrow q$ vadinsime **tiesiogine**, tai sakysime, kad

$q \Rightarrow p$ – **atvirkštinė teorema tiesioginei** teoremai $p \Rightarrow q$,

$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ – **priešingoji teorema tiesioginei** teoremai $p \Rightarrow q$,

$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ – **priešingoji teorema atvirkštinei** teoremai $q \Rightarrow p$.

Suprantama, imant konkrečią teoremą, toks skirstymas yra sąlyginis: dažniausiai bet kurią iš tų keturių teoremų galime laikyti tiesiogine, o kitas tris sudaryti laikantis tos schemos.

Iš tiesioginės teoremos teisingumo ne visada išplaukia jai atvirkštinės ir priešingosios teoremų teisingumas. Dabar suformuluosime dvi teoremas apie teoremas.

1.1 teorema. *Tiesioginė ir priešingoji atvirkštinei teoremos yra ekvivalenčios, t.y.*

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$$

Įrodymas išplaukia iš neteisingos išvados ir dvigubo neigimo dėsnių.

1.2 teorema. *Atvirkštinė ir priešingoji teoremos yra ekvivalenčios, t.y.*

$$(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\overline{p} \Rightarrow \overline{q}).$$

Teoremos įrodymas išplaukia iš 1 teoremos, sukeitus vietomis p ir q.

Šios teoremos svarbios dėl to, kad vienos teoremos įrodymą galima pakeisti kitos teoremos įrodymu. Jeigu tiesioginės teoremos $p \Rightarrow q$ įrodymas sudėtingesnis negu priešingosios atvirkštinei teoremai, tai įrodoma pastaroji, o tiesioginės teoremos įrodymas išplaukia iš 1 teoremos. Toks teoremos įrodymas vadinamas **netiesioginiu** arba **prieštaros metodu**.

1.6. MATEMATINĖS INDUKCIJOS METODAS

Matematinės indukcijos metodas yra senas, tačiau nesenstantis įvairių teoremų įrodymo būdas. Šis metodas remiasi **Peano aksioma**, kuri dažnai vadinama **matematinės indukcijos aksioma**:

Jei teiginys teisingas, kai $n=1$*, ir iš to, kad jis teisingas, kai* $n=k$*,* $k\in N$*, išplaukia, jog jis teisingas ir tada, kai* $n=k+1$*, tai teiginys teisingas ir bet kuriam natūraliajam skaičiui* n*.*

Įrodant teiginio (teoremos) $T(n)$ teisingumą matematinės indukcijos metodu, reikia:

1. įrodyti (patikrinti), kad teisingas teiginys, kai $n=1$, t.y. teisingas teiginys $T(1)$;

2. padaryti prielaidą, kad teiginys yra teisingas, kai $n=k$ ir, remiantis šia prielaida, įrodyti, kad teiginys teisingas, kai $n=k+1$, t.y. įrodyti, jog $T(k)\Rightarrow T(k+1)$. Tada galima daryti išvada, kad teiginys $T(n)$ teisingas $\forall n\in N$.

Pavyzdys. Įrodykime, kad skaičius $a_n=n^3-n$, $n\in N$, dalus iš 6.

<u>Įrodymas</u>. 1. kai $n=1$, tai $a_1=1^3-1=0$ – dalus iš 6.

2. Tarkime, kad teiginys teisingas, kai $n=k$, t.y. kad $a_k=k^3-k$ dalus iš 6. Tada

$$a_{k+1}=(k+1)^3-(k+1)=k^3-k+3k(k+1)=a_k+3k(k+1).$$

Pirmasis dėmuo dalijasi iš 6 pagal prielaidą; antrasis dėmuo dalijasi iš 6, nes jis dalijasi iš 3 ir iš 2, nes vienas iš skaičių k arba $k+1$ yra lyginis.

Vadinasi, skaičius $a_n=n^3-n$ dalijasi iš 6, kai n – bet kuris natūralusis skaičius. ▲

1.7. UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI

1. Nustatykite, kurie iš šių sakinių yra teiginiai:

a) Klaipėdoje yra universitetas;

b) Vilnius yra Lietuvos sostinė;

c) Kur yra miestas Londonas?

d) Sausis – šalčiausias mėnuo;

e) Šlovė aukštajam mokslui.

2. Nustatykite, kurios iš šių išraiškų yra teiginiai:

a) $4\times 5=20$; b) $10+8\div 2=13$;

c) $30-14$; d) $x^2-5x+6=0$; e) 52.

Nustatykite šių teiginių teisingumą:

3. p – „Du lygiapločiai trikampiai yra lygūs“;

4. q – „Realiųjų skaičių aibė yra kompleksinių skaičių aibės poaibis“;

5. r – „Išraiška „π ir e“ yra teiginys“;

6. s – „Ne visos antrojo uždavinio išraiškos yra teiginiai“.

7. Nustatykite, kurios iš parašytų išraiškų yra disjunkcijos:

a) penki arba šeši; b) $(n>3)\vee(n>6)$;

c) atvažiuojantis autobusas yra penktas arba aštuntas;

d) $(3+8=10)\vee(3+8=11)$; e) $(7-2=5)\vee 9$.

Raskite pateiktų disjunkcijų teisingumą:

8. p – „$(5+2=7)\vee(3+2=5)$“. **9.** q – „$(3\times 4=10)\vee(15\div 2=8)$“.

10. r – „$(\pi=3)\vee(\pi=4)$“. **11.** s – „$\bigvee_{k=1}^{8} p_k$, čia p_k reiškia: skaičius k dalus iš 5“.

12. Sudarykite disjunkcijos $p\vee q\vee r$ teisingumo lentelę.

Raskite pateiktų konjunkcijų teisingumą:

13. p – „$(x=y)\wedge(x<y)$“. **14.** q – „$(\cos x\cdot \operatorname{tg} x=\sin x)\wedge(\sin 2\pi=0)$“.

15. r – „$\bigwedge_{k=1}^{10} p_k$, čia p_k reiškia: skaičius k dalus iš 3“.

16. Sudarykite konjunkcijos $p\wedge q\wedge r$ teisingumo lentelę.

17. Užrašykite nelygybės $x^2-6x-1>0$ sprendinių disjunkciją.

Nustatykite šių sudėtinių teiginių teisingumo reikšmes, jei $\tau(p)=\tau(r)=0$, $\tau(q)=1$:

18. $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$. **19.** $(p\Rightarrow q)\Rightarrow r$. **20.** $(p\wedge q)\Rightarrow r$. **21.** $(p\vee q)\Rightarrow r$.

22. $p\Rightarrow(q\wedge r)$. **23** $p\Rightarrow(q\vee r)$. **24.** $[(p\vee q)\wedge r]\Rightarrow[(p\wedge r)\vee(q\wedge r)]$.

25. Nustatykite kada neteisinga implikacija

$$p_1\Rightarrow\{p_2\Rightarrow[p_3\Rightarrow(p_4\Rightarrow p_5)]\}.$$

26. Patikrinkite, ar ekvivalentūs šie teiginiai:

a) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$ ir $(p\wedge q)\Rightarrow r$; b) $(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)$ ir $p\Rightarrow(q\wedge r)$;

c) $(p\Rightarrow q)\vee(p\Rightarrow r)$ ir $(p\wedge q)\Rightarrow r$; d) $(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)$ ir $(p\vee q)\Rightarrow r$.

Įrodykite matematinės indukcijos metodu:

27. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

28. $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$.

29. $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

30. $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

31. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+(n-1)\,n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

32. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

33. $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\cdot\sin\dfrac{n\alpha}{2}$.

34. $\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\cos2^2\alpha\cdot\ldots\cdot\cos2^n\alpha=\dfrac{\sin2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$.

35. $(a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)$.

36. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\ldots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$.

ATSAKYMAI

1. a, b, d. **2.** a, b, d. **3.** $\tau(p)=0$. **4.** $\tau(q)=1$. **5.** $\tau(r)=0$. **6.** $\tau(s)=1$. **7.** b, c, d. **8.** $\tau(p)=1$. **9.** $\tau(q)=0$. **10.** $\tau(r)=0$. **11.** $\tau(s)=1$. **12.** $p\vee q\vee r$ neteisingas, tik kai $\tau(p)=\tau(q)=\tau(r)=0$. **13.** $\tau(p)=0$. **14.** $\tau(q)=1$, **15.** $\tau(r)=0$. **16.** $p\wedge q\wedge r$ teisingas, tik kai $\tau(p)=\tau(q)=\tau(r)=1$. **17.** $(x<3-\sqrt{10})\vee(x>3+\sqrt{10})$. **18.** $\tau(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))=1$.
19. $\tau((p\Rightarrow q)\Rightarrow r)=0$. **20.** $\tau((p\wedge q)\Rightarrow r)=1$. **21.** $\tau((p\vee q)\Rightarrow r)=0$.**22.** $\tau(p\Rightarrow(q\wedge r))=1$.
23. $\tau(p\Rightarrow(q\vee r))=1$. **24.** $\tau\{[(p\vee q)\wedge r]\Rightarrow[(p\wedge r)\vee(q\wedge r)]\}=1$.
25. $\tau(p_1)=\tau(p_2)=\tau(p_3)=\tau(p_4)=1$, $\tau(p_5)=0$. **26.** Visi ekvivalentūs.